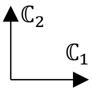
# SPIN QUANTIQUE

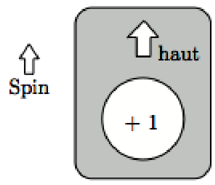
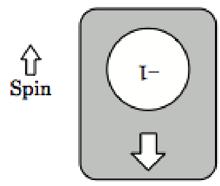
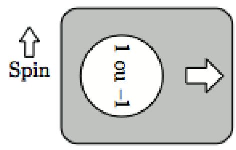
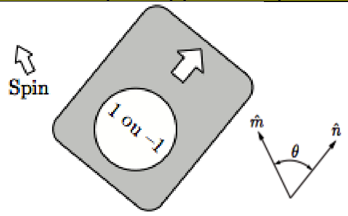
IP

L'existence du spin est responsable des phénomènes magnétiques, de même que la charge régit les phénomènes électriques. Le lien entre le magnétisme et l'électricité provient de ce que l'électron possède à la fois une charge et un spin. Le spin de l'électron est le plus simple et le plus quantique des objets, c'est pour cela qu'il va nous servir à appréhender le monde de la physique quantique. Les principales propriétés de l'électron sont la position, la vitesse, la charge et le spin. Cette dernière n'a pas d'équivalent en physique classique. D'autre part, la connaissance de la position et de la vitesse est limitée par le principe d'incertitude d'Heisenberg qui a pour conséquence que l'on ne sait plus trop où se trouve l'électron autour du noyau. C'est pour cette raison que nous avons besoin d'utiliser les probabilités. Rappel de quelques notions mathématiques fondamentales pour entrer dans ce monde étrange.

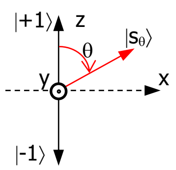
$e^-$ → Position, Vitesse } Incertitude $\sigma_x \sigma_v \geq \hbar/2$
→ Charge = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$C
→ Spin = Qbit

| Nombres complexes $\mathbb{C}$ $(\mathbb{R} \subset \mathbb{C})$ | Espace vectoriel complexe $\mathcal{H}_{spin}$ | Kets et Bras <brakets> |
|---|---|---|
| $j = \sqrt{-1}$ $j^2 = -1$<br>$z = x + jy = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)$<br>$z^* = x - jy = re^{-j\theta}$ $z^* \cdot z = r^2$<br>*nombre complexe conjugué | <br>Les 2 axes sont des nombres complexes. C'est espace se nomme espace de Hilbert. | Vecteurs de l'espace vectoriel complexe :<br>Vecteur-ket : $\|A\rangle \equiv \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ $\alpha \Rightarrow$nombres $\mathbb{C}$<br>Vecteur-bra : $\langle A\| \equiv (\alpha_1^* \quad \alpha_2^*)$<br>Opérations sur les bra-ket :<br>Addition de kets : $\|A\rangle + \|B\rangle = \|B\rangle + \|A\rangle = \|C\rangle$<br>Multiplic. par z : $z\{\|A\rangle + \|B\rangle\} = z\|A\rangle + z\|B\rangle$<br>Produit scalaire : $\langle B\|A\rangle = z$<br>Vecteurs normalisés : $\langle A\|A\rangle = 1$<br>Vecteurs orthogonaux : $\langle B\|A\rangle = 0$<br>En bases orthonormés :<br>$\|A\rangle = \sum_i \alpha_i \|i\rangle = \sum_i \|i\rangle\langle i\|A\rangle$ |

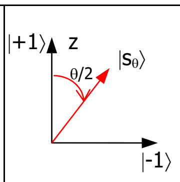
La nature quantique du spin se manifeste par la discontinuité de ses valeurs numériques possibles : elles sont « quantifiées ». Concrètement, les valeurs du spin ne peuvent être que des multiples entiers ou demi-entiers de ħ, la constante réduite de Planck. La valeur du spin de l'électron est ainsi ħ/2 ; on dit en général que son spin vaut ½. Les protons et les neutrons ont aussi un spin ½, le photon un spin 1, les mésons p un spin 0, etc. Les particules possédant un spin ½ sont des fermions et celle de spin entier ou zéro, des bosons. Les orientations du spin aussi sont quantifiées : il ne peut en exister que 2•*spin* + 1, ainsi, le spin de l'électron ne peut prendre que 2 × ½ + 1 = 2 orientations. Interprété tout d'abord comme une rotation de la particule, il s'est avéré que cette interprétation était trop naïve. Aujourd'hui on pense que le spin d'une particule pourrait être lié au vide quantique de la manière suivante : il représenterait non une rotation de la particule mais une rotation du vide (constitué de particules et d'antiparticules virtuelles) autour de la particule. C'est ces quantons virtuels repoussés ou attirés par la particule qui auraient un tel mouvement de rotation soit dans un sens soit dans l'autre, ce qui donnerait les spins up et down. Pour comprendre la nature précise du spin nous allons étudier sa mesure :

| L'appareil est dans le même sens que le spin | L'appareil est dans le sens inverse du spin | L'appareil est tourné à 90⁰ du sens du spin | L'appareil est d'un angle quelconque par rapport au spin |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |
| $\sigma_z = +1$ | $\sigma_z = -1$ | $\sigma_x = +1 \; ou -1$ | $\sigma = +1 \; ou -1$ |
| Avant la mesure le spin est en *états superposés* : $\|s\rangle = a\|{+1}\rangle + b\|{-1}\rangle \in \mathcal{H}_{spin}$ a et b $\in \mathbb{C}$<br>C'est le chat de Schrödinger ! | | Logiquement le résultat devrait être zéro. C'est la moyenne des résultats qui vaut 0 : $\sigma_m = 0$. | Même principe, la moyenne des résultats vaut cette fois cosθ, soit $\hat{m} \times \hat{n}$. |

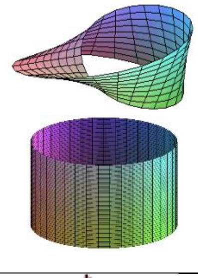
**Attention**, deux espaces entrent en jeu (ne pas confondre) : l'espace quantique du spin $\mathcal{H}_{spin}$ définit plus haut qui est un espace vectoriel complexe de dimension deux, et l'espace ordinaire $\mathcal{R}$ qui est un espace réel de dimension trois avec les variables de position (x,y,z). Ainsi, pour passer de $|{+1}\rangle$ à $|{-1}\rangle$ dans l'espace ordinaire, il faut tourner de 180⁰ alors que dans l'espace de spin c'est la moitié, soit 90⁰. C'est pour cette raison que pour retrouver le même état de spin, il est nécessaire de tourner de 720⁰. Nous sommes dans un espace simplement connexe tel le ruban de Möbius. Tracer un parcours complet sur celui-ci puis mettez le ruban en cylindre, vous trouverez sans peine les 720⁰.




Espace ordinaire : $\mathcal{R}^3$




Espace de spin : $\mathbb{C}^2$



Les opérateurs de rotation de spin ½ sont représentés par les trois matrices de Pauli :

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma} \quad \text{avec}$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

Ainsi l'opérateur $\vec{S}$ permet d'obtenir les résultats de l'expérience de Stern et Gerlach (1922) sur la mesure de spin ½ avec des atomes d'argent. C'est cette expérience qui a mis en évidence la réalité du spin électronique. Le choix d'atomes d'Ag est simple, celui-ci ne possède qu'un électron sur la dernière couche et c'est donc celui-ci qui dicte l'état du spin de l'ensemble de l'atome.